УДК 517.2.3

О ЦЕНТРАХ СИММЕТРИИ ФУНКЦИИ, ОПРЕДЕЛЕННОЙ В ВЫПУКЛОЙ ОБЛАСТИ ПЛОСКОСТИ

А.А. Шум

Вопросы симметрии функций двух переменных рассматривались в работах [1–3], причем в последней из них были введены понятия центра *s*-симметрии и центра *c*-симметрии функции, определенной в некоторой области плоскости. В настоящем исследовании показано, что в любой выпуклой области плоскости можно определить функцию двух переменных так, что ее центр *s*-симметрии (центр *c*-симметрии) будет находиться в любой наперед заданной внутренней точке этой области. Изложение опирается на определения из [3] (приводятся ниже). При этом, в отличие от статьи [3], где используется прямоугольная система координат, здесь так же, как в [1] и [2], рассматриваются полярные координаты.

Под *областью* понимаем область плоскости, ограниченную замкнутой линией без самопересечений. Линия, ограничивающая область (*граница области*), считается частью области (таким образом, область является *замкнутой*). Точки области, не лежащие на ее границе, являются *внутренними* точками данной области. Область называем *выпуклой*, если всякая прямая, проведенная через любую внутреннюю точку этой области, пересекает ее границу ровно в двух точках.

Рассмотрим непрерывные функции двух переменных, определенные в некоторой области D. Эти функции удобно записывать в виде $f(\varphi,\rho)$, считая заданной подходящую полярную систему координат (отметим, что при переходе от одной системы координат к другой выражение функции $f(\varphi,\rho)$ через координаты изменяется, хотя сама функция, как функция точки, остается неизменной).

В соответствии с [3] точка плоскости является *центром s-симметрии* функции $f(\varphi,\rho)$ в области D, если любая прямая, проведенная через эту точку, делит область D на две области D_1 и D_2 так, что $\iint\limits_{D_1} f(\varphi,\rho)\rho d\rho d\varphi = \iint\limits_{D_2} f(\varphi,\rho)\rho d\rho d\varphi$ (заметим, что значения интегралов не зависят от выбора системы координат, следовательно, данное определение инвариантно по отношению к этому выбору). В случае, когда функция $f(\varphi,\rho)$ определяет плотность материала, заполняющего область D, точка будет центром *s*-симметрии функции тогда и только тогда, когда любая прямая, проведенная через нее, будет делить область D на две части одинаковой массы (центр *s*-симметрии функции в этом случае также называют [3] *центром полумасс* соответствующей пластины).

Лемма 3(б) из [1] устанавливает следующий критерий: *функция* $f(\varphi,\rho)$, *определенная в круге радиуса R с центром в начале координат, имеет центр s-симметрии в начале координат тогда и только тогда, когда функция* $F(\varphi)=\int\limits_0^R f(\varphi,\rho)\rho d\rho$ *является периодической с периодом* π. Следующая лемма представляет собой обобщение этого критерия на случай функции, определенной в произвольной выпуклой области.

Лемма. *Пусть начало координат полярной системы является внутренней точкой некоторой выпуклой области D и* $r(\varphi)$ *– расстояние от начала координат до границы области вдоль луча, определяемого углом* φ. *Тогда функция* $f(\varphi,\rho)$, *определенная в области D, имеет центр s-симметрии в начале координат в том и только том случае, когда функция* $F(\varphi)=\int\limits_0^{r(\varphi)} f(\varphi,\rho)\rho d\rho$ *является периодической с периодом π.*

Доказательство.

Через C_α обозначим сектор области D, определяемый условием $0\le\varphi\le\alpha$ (часть области D, заметаемая лучом, который вращается от положения $\varphi=0$ до положения $\varphi=\alpha$), и рассмотрим функцию $\Phi(\alpha)=\iint\limits_{C\alpha} f(\varphi,\rho)\rho d\rho d\varphi$. Очевидно, что

$$\Phi(\alpha)=\int\limits_0^{\alpha} d\varphi \int\limits_0^{r(\varphi)} f(\varphi,\rho)\rho d\rho=\int\limits_0^{\alpha} F(\varphi)d\varphi. \qquad (1)$$

В силу известной [4] теоремы о производной определенного интеграла по переменному верхнему пределу

$$\Phi'(\alpha)=F(\alpha). \qquad (2)$$

Обозначим через D_α часть области D, определяемую условием $\alpha\le\varphi\le\alpha+\pi$, и рассмотрим функцию $G(\alpha)=\iint\limits_{D\alpha} f(\varphi,\rho)\rho d\rho d\varphi$. Очевидно, что

$$G(\alpha)=\int\limits_{\alpha}^{\alpha+\pi} d\varphi \int\limits_0^{r(\varphi)} f(\varphi,\rho)\rho d\rho=\int\limits_{\alpha}^{\alpha+\pi} F(\varphi)d\varphi=\int\limits_0^{\alpha+\pi} F(\varphi)d\varphi-\int\limits_0^{\alpha} F(\varphi)d\varphi=\Phi(\alpha+\pi)-\Phi(\alpha)$$

Из соотношения (2) следует, что

$$G'(\alpha)=F(\alpha+\pi)-F(\alpha). \qquad (3)$$

Как несложно заметить, функция $f(\varphi,\rho)$ имеет центр s-симметрии в начале координат в том и только том случае, когда $G(\alpha)=\frac{1}{2}\iint\limits_{D} f(\phi,\rho)\rho d\rho d\phi=\mathrm{const}$. В силу теоремы о производной постоянной функции [4] это может быть тогда и только тогда, когда $G'(\alpha)\equiv 0$. В силу (3) последнее условие равносильно тому, что $F(\alpha+\pi)=F(\alpha)$ при любом значении угла α. Но это и означает, что функция $F(\varphi)$ является периодической с периодом π. Лемма доказана.

Теорема 1. *Для любой внутренней точки выпуклой области D можно определить в области D такую функцию* $f(\varphi,\rho)$, *центр s-симметрии которой будет находиться именно в этой точке.*

Доказательство.

Выберем начало координат полярной системы в той внутренней точке области D, в которой должен быть центр s-симметрии функции $f(\varphi,\rho)$. Пусть $r(\varphi)$ – расстояние от начала координат до границы области D вдоль луча, определяемого углом φ. Определим требуемую функцию как $f(\varphi,\rho)=\frac{\rho}{[r(\varphi)]^3}$. Тогда

$$F(\varphi)=\int\limits_0^{r(\varphi)} f(\varphi,\rho)\rho d\rho=\int\limits_0^{r(\varphi)} \frac{\rho}{[r(\varphi)]^3}\rho d\rho=\left[\frac{\rho^3}{3[r(\varphi)]^3}\right]_0^{r(\varphi)}=\frac{1}{3}.$$

Таким образом, функция $F(\varphi)$ постоянна, поэтому является и периодической с периодом π, так что (в силу доказанной выше леммы) центр s-симметрии функции $f(\varphi,\rho)$ находится в начале координат, т. е. именно в нужной точке.

Теорема доказана (заметим, что построенная при доказательстве функция непрерывна, неотрицательна и притом обращается в ноль лишь в начале координат – таким образом, она удовлетворяет всем принятым в [3] ограничениям).

В соответствии с [3] точка плоскости является *центром c-симметрии* функции $f(\varphi,\rho)$ в области *D*, если любая прямая, проведенная через эту точку, делит область *D* на две области D_1 и D_2 так, что $\iint\limits_{D_1} R(\varphi,\rho) f(\varphi,\rho)\rho d\rho d\varphi = \iint\limits_{D_2} R(\varphi,\rho) f(\varphi,\rho)\rho d\rho d\varphi$, где $R(\varphi,\rho)$ – расстояние от точки (φ,ρ) до проведенной прямой (заметим, что значения интегралов не зависят от выбора системы координат, а значит, данное определение инвариантно по отношению к этому выбору). Легко видеть, что в случае, когда функция $f(\varphi,\rho)$ определяет плотность материала, заполняющего область *D*, ее центр *c*-симметрии представляет собой *центр масс* соответствующей пластины [3].

Теорема 2. *Для любой внутренней точки выпуклой области D можно определить в области D такую функцию* $f(\varphi,\rho)$*, центр c-симметрии которой будет находиться именно в этой точке.*

Доказательство.

Выберем начало координат полярной системы в той внутренней точке области *D*, в которой должен быть центр *c*-симметрии функции $f(\varphi,\rho)$. Пусть $r(\varphi)$ – расстояние от начала координат до границы области *D* вдоль луча, определяемого углом φ. Определим требуемую функцию как

$$f(\varphi,\rho) = \frac{\rho}{[r(\varphi)]^4}.$$

Эта функция непрерывна и неотрицательна, причем обращается в ноль только в начале координат. Таким образом, она удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к функциям двух переменных в [3], и может рассматриваться как функция плотности соответствующей пластины. Из теоремы 1 статьи [3] вытекает, что центр масс этой пластины (а значит, и центр *c*-симметрии функции $f(\varphi,\rho)$) находится в начале координат в том и только том случае, когда выполнены следующие условия:

$$\begin{cases} \iint\limits_{D} \rho\cos\varphi f(\varphi,\rho)\rho d\rho d\varphi = 0, \\ \iint\limits_{D} \rho\sin\varphi f(\varphi,\rho)\rho d\rho d\varphi = 0. \end{cases}$$

Эти условия для определенной нами функции $f(\varphi,\rho)$ выполнены:

$$\iint\limits_{D} \rho\cos\varphi f(\varphi,\rho)\rho d\rho d\varphi = \iint\limits_{D} \rho\cos\varphi \frac{\rho}{[r(\varphi)]^4}\rho d\rho d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi}{[r(\varphi)]^4} d\varphi \int\limits_0^{r(\varphi)} \rho^3 d\rho = \int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi}{4} d\varphi = 0,$$

$$\iint\limits_{D} \rho\sin\varphi f(\varphi,\rho)\rho d\rho d\varphi = \iint\limits_{D} \rho\sin\varphi \frac{\rho}{[r(\varphi)]^4}\rho d\rho d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin\varphi}{[r(\varphi)]^4} d\varphi \int\limits_0^{r(\varphi)} \rho^3 d\rho = \int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin\varphi}{4} d\varphi = 0.$$

Таким образом, центр *c*-симметрии функции $f(\varphi,\rho)$ находится в начале координат, т. е. именно в нужной точке. Теорема доказана.

Библиографический список

1. Шум, А.А. О симметрии функций, определенных в круге / А.А. Шум // Вестник Тверского государственного технического университета. 2014. № 1 (25). С. 3–8.

2. Шум, А.А. Замечание об *s*-симметричных функциях / А.А. Шум // Вестник Тверского государственного технического университета. 2015. № 1 (27). С. 3–6.

3. Шум, А.А. О центрах симметрии функции двух переменных / А.А. Шум // Вестник Тверского государственного технического университета. 2016. № 2 (30). С. 14–18.

4. Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчислений: в 3 т. / Г.М. Фихтенгольц. Т. 1. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 671 с.